

## 4.1 Der Satz des Pythagoras

Video:

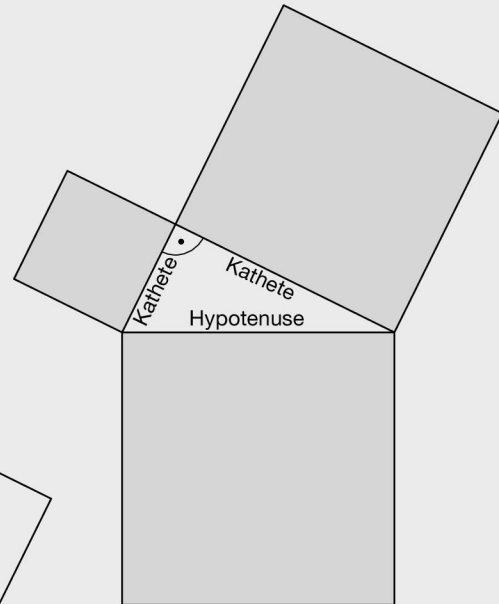
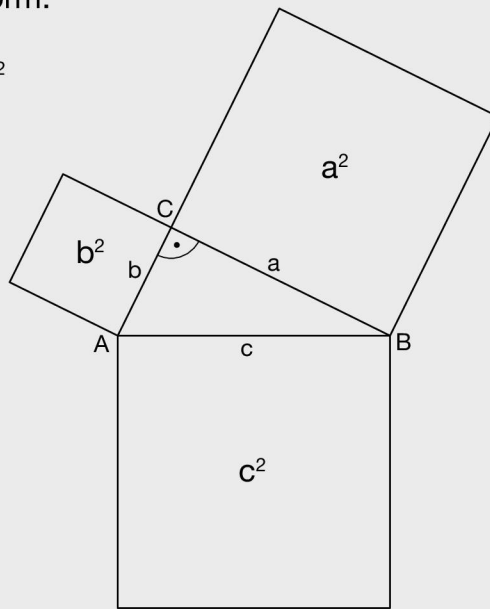


### Einführung

- Der **Satz des Pythagoras** gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken!
- Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse.
- Die beiden Seiten, die dem rechten Winkel anliegen, heißen Katheten.
- Der Satz des Pythagoras besagt:  
Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Nennt man die Katheten  $a$  und  $b$  und die Hypotenuse  $c$ , so erhält man die Kurzform:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

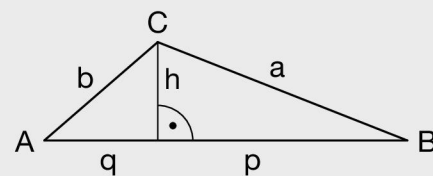


Dreiecke ohne rechten Winkel kann man mithilfe einer Höhe teilen. So erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. Hier gilt:

$$q^2 + h^2 = b^2$$

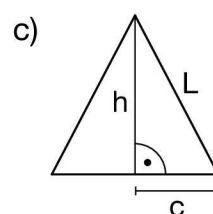
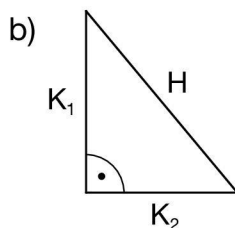
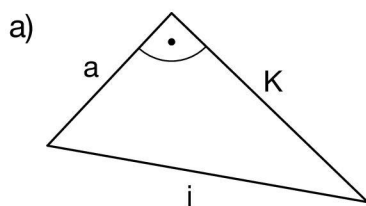
und

$$p^2 + h^2 = a^2$$



### Einstiegsaufgabe

Gib die Formel für den Satz des Pythagoras mit den angegebenen Bezeichnungen an.

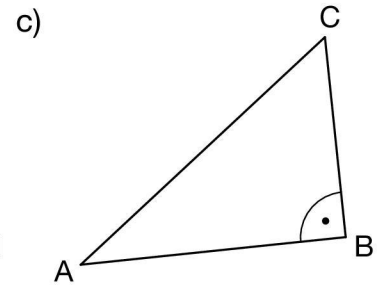
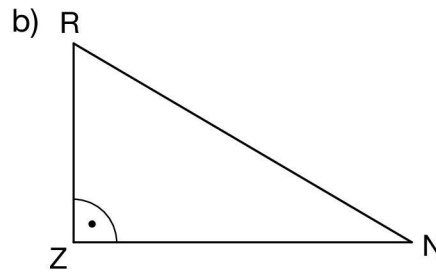
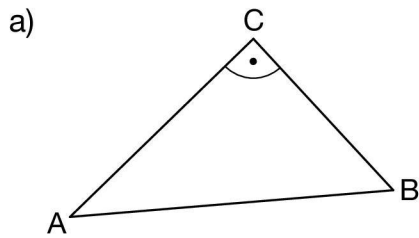


## 4.1 Der Satz des Pythagoras

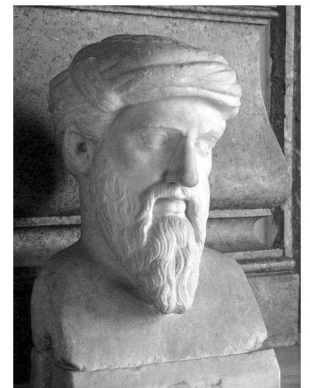
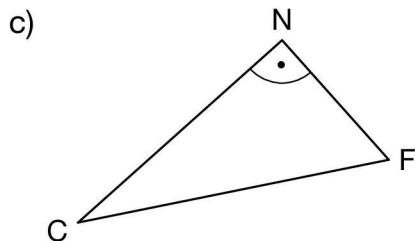
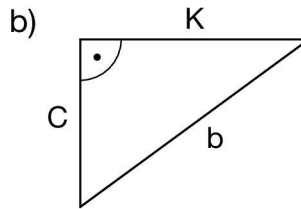
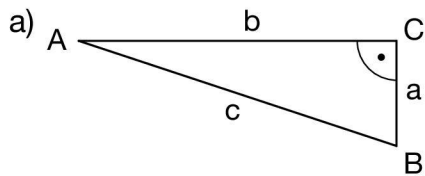
### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Beschrifte die rechtwinkligen Dreiecke mit den Begriffen „Hypotenuse“ und „Kathete“.



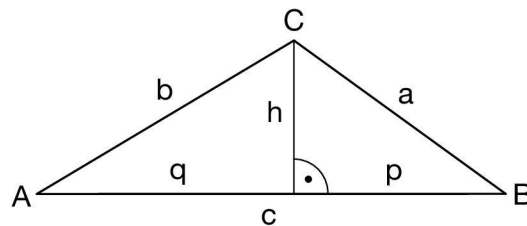
2. Gib für jedes rechtwinklige Dreieck den Satz des Pythagoras an.



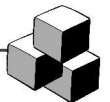
### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



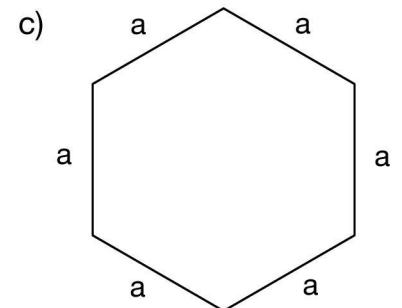
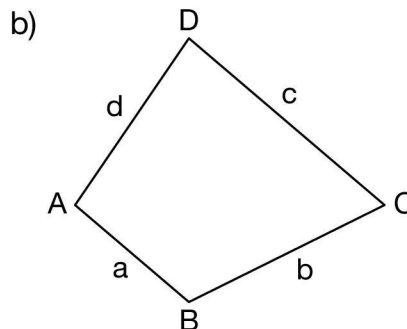
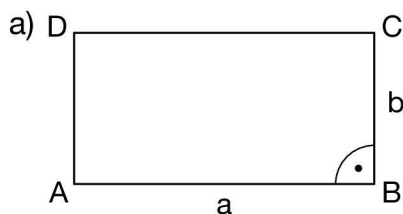
3. Erkläre, wie sich in folgenden nicht-rechtwinkligen Dreiecken der Satz des Pythagoras anwenden lässt. Bezeichne die entsprechenden Seiten mit den Begriffen Hypotenuse bzw. Kathete.



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



4. Zerlege die gegebenen Figuren in rechtwinklige Dreiecke und stelle mögliche Beziehungen der Seiten als Formel dar. Benenne dazu die von dir eingezeichneten Seiten.



## 4.2 Längen von Dreiecksseiten berechnen

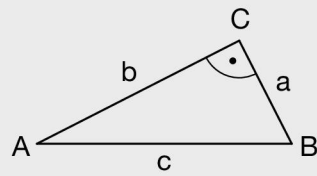
Video:



### Einführung

#### Satz des Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  gilt:  $a^2 + b^2 = c^2$

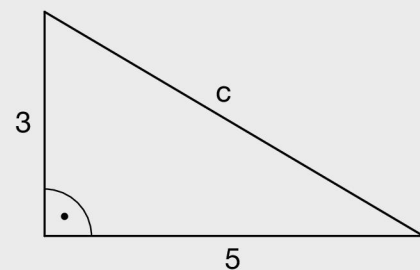


Fehlende Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck können mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

- Sind zwei Seitenlängen gegeben, lässt sich stets die dritte Seitenlänge berechnen.
- Achte stets darauf, welche der Seiten die Hypotenuse ist.

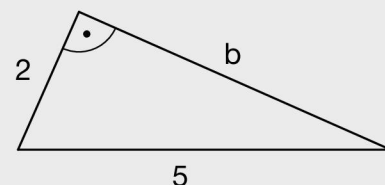
**1. Fall:** Es sind die beiden Längen der Katheten gegeben:

Es gilt: $3^2 + 5^2 = c^2$	Zahlen quadrieren
$9 + 25 = c^2$	addieren
$34 = c^2$	Wurzel ziehen
$c = \sqrt{34} \approx 5,83$	



**2. Fall:** Es sind die Länge einer Kathete und die Länge der Hypotenuse gegeben:

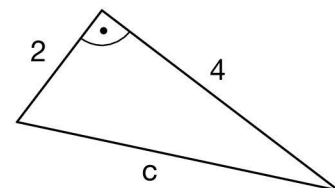
Es gilt: $2^2 + b^2 = 5^2$	Zahlen quadrieren
$4 + b^2 = 25$	umstellen
$b^2 = 21$	Wurzel ziehen
$b = \sqrt{21} \approx 4,58$	



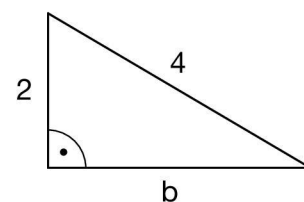
### Einstiegsaufgabe

Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge wie in den beiden Fällen oben beschrieben.

- a) Es gilt: \_\_\_\_\_ | Zahlen quadrieren  
 \_\_\_\_\_ | addieren  
 \_\_\_\_\_ | Wurzel ziehen  
 \_\_\_\_\_



- b) Es gilt: \_\_\_\_\_ | Zahlen quadrieren  
 \_\_\_\_\_ | umstellen  
 \_\_\_\_\_ | Wurzel ziehen  
 \_\_\_\_\_

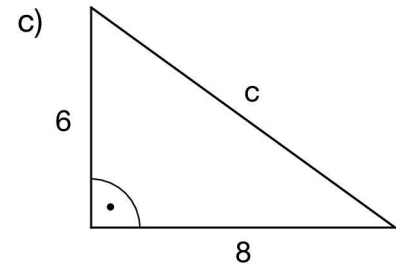
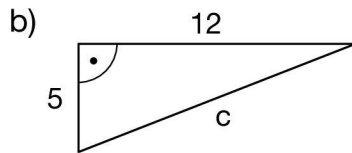
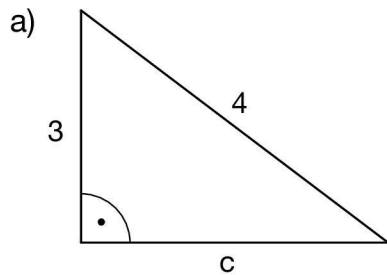


## 4.2 Längen von Dreiecksseiten berechnen

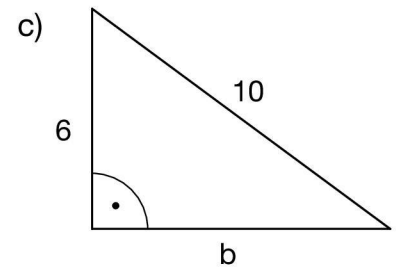
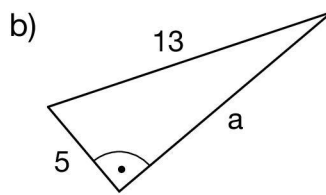
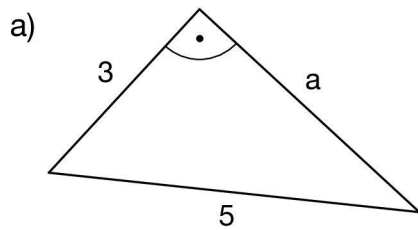
### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



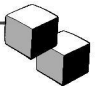
1. Berechne die Länge der Hypotenuse.



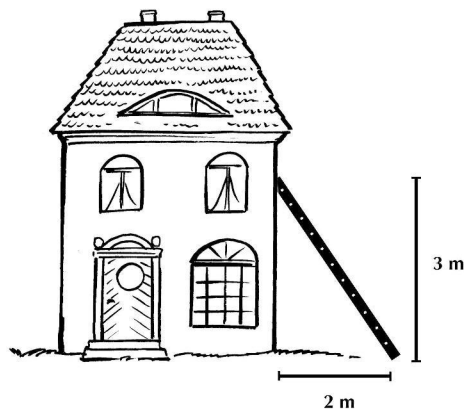
2. Berechne jeweils die fehlende Länge der Kathete.



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

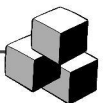


3. Berechne die Länge der Leiter.



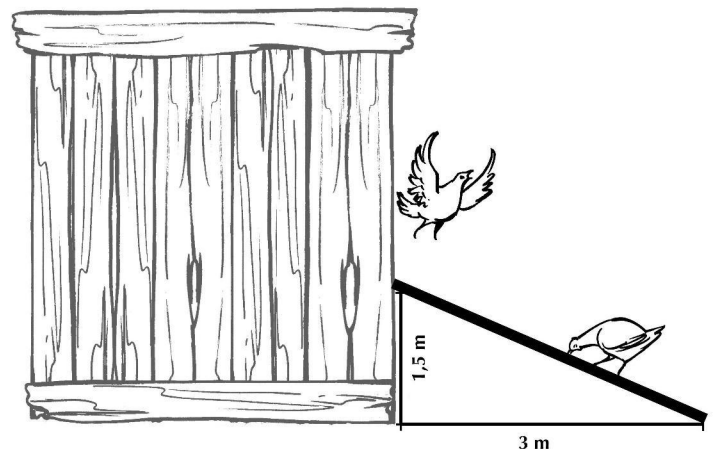
4. Eine 2,5 Meter lange Leiter lehnt an einem Haus in einer Höhe von zwei Metern. Berechne den Abstand von der Leiter zum Haus am Boden.

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



5. Auf dem Bauernhof von Herrn Hafi gibt es viele Hühner. Diese müssen, um in ihren Stall zu gelangen, ein Brett hochlaufen. Pro Tag laufen sie zweimal in den Stall.

Berechne die Streckenlänge in m, die sie pro Tag das Brett hinauf bzw. hinunter laufen.



## 4.3 Der Höhen- und Kathetensatz

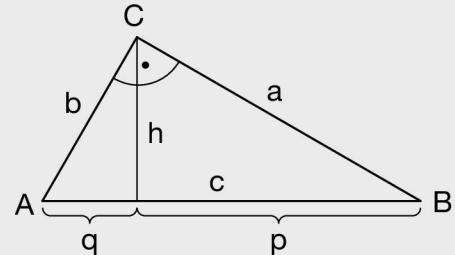
Video:



### Einführung

- Mit dem **Höhensatz** und **Kathetensatz** können fehlende Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken berechnet werden.
- Die Formeln gelten nur in rechtwinkligen Dreiecken!

Beachte:  $p + q = c$



Im abgebildeten Dreieck gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

(Höhensatz)

$$a^2 = c \cdot p$$

(Kathetensatz)

$$b^2 = c \cdot q$$

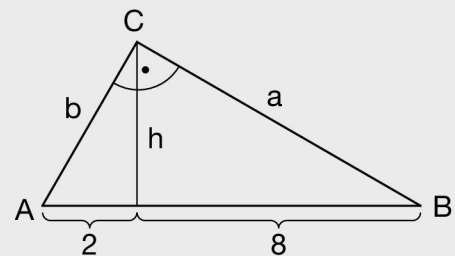
(Kathetensatz)

### Anwendungsbeispiel Höhensatz:

Es gilt:  $h^2 = 2 \cdot 8$

$$h^2 = 16$$

$$h = \sqrt{16} = 4$$

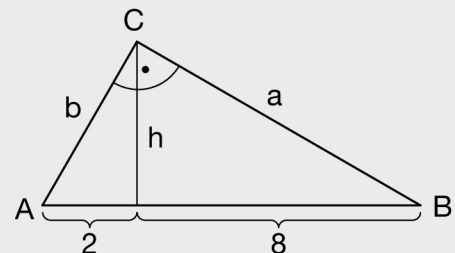


### Anwendungsbeispiel Kathetensatz:

Es gilt:  $b^2 = 10 \cdot 2$

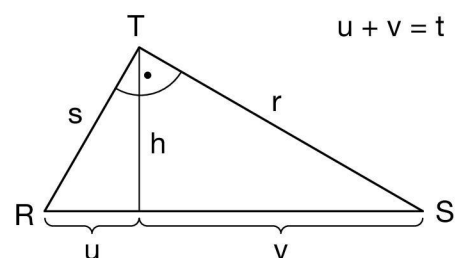
$$b^2 = 20$$

$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$



### Einstiegsaufgabe

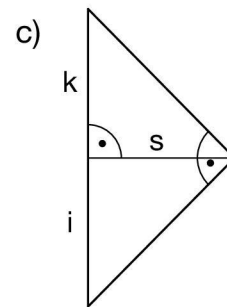
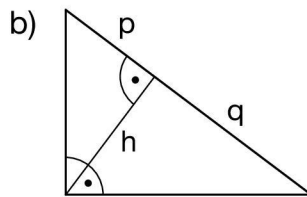
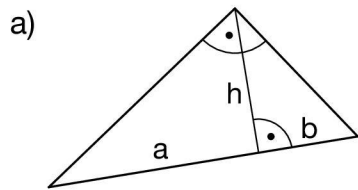
- Formuliere den Höhensatz und den Kathetensatz für das rechtwinklige Dreieck.
- Berechne im Dreieck die Höhe  $h$  mit dem Höhensatz, wenn  $u = 3$  und  $v = 3$  ist.
- Berechne im Dreieck die Seitenlängen  $s$  und  $r$  mit dem Kathetensatz, wenn  $u = 4$  und  $t = 9$  ist.



## 4.3 Der Höhen- und Kathetensatz

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

1. Stelle die Formel für den Höhensatz in den Dreiecken auf.



2. Gegeben sind jeweils rechtwinklige Dreiecke mit  $\gamma = 90^\circ$ . Berechne die Höhe h mithilfe des Höhensatzes und gib das Ergebnis in cm an.

a)  $p = 3,5 \text{ cm}$ ;  $q = 2 \text{ dm}$

b)  $q = 12 \text{ cm}$ ;  $p = 35 \text{ mm}$

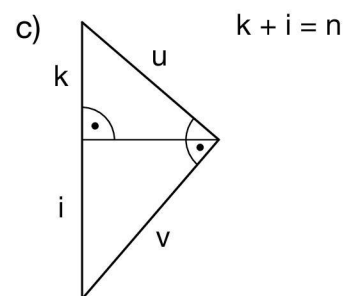
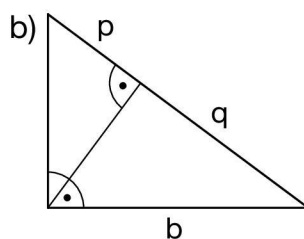
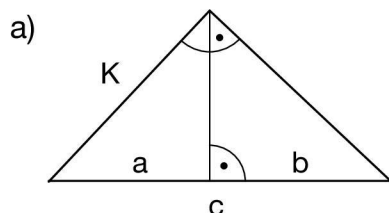
### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Gegeben ist die Formel für den Höhensatz  $h^2 = p \cdot q$ .

a) Stelle die Gleichung nach q um.

b) Stelle die Gleichung nach p um.

4. Stelle die Formel für den Kathetensatz in den Dreiecken auf.



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

5. Berechne die fehlenden Größen mithilfe der dir bekannten Sätze.

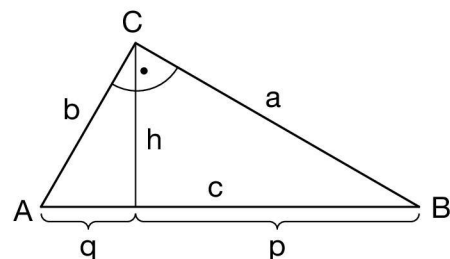
Verwende bei Bedarf auch den Satz des Pythagoras.

a)  $a = 4 \text{ cm}$ ;  $p = 3 \text{ cm}$

b)  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $a = 6 \text{ cm}$

c)  $b = 6 \text{ cm}$ ;  $q = 4 \text{ cm}$

d)  $h = 3,5 \text{ cm}$ ;  $q = 1,5 \text{ cm}$



## 4.4 Den Satz des Pythagoras bei geometrischen Figuren anwenden

Video:



### Einführung

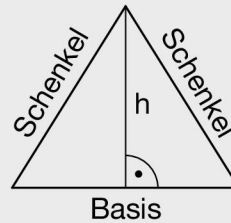
Beachte: Den **Satz des Pythagoras** kann man nur in rechtwinkligen Dreiecken anwenden.

Wenn man in anderen Figuren Seitenlängen berechnen soll, kann man dort rechtwinklige Dreiecke suchen, um den Satz des Pythagoras anwenden zu können.

### Beispiel: Gleichschenkliges Dreieck

Es gilt:

- Die Schenkel sind gleich lang.
- Die Höhe teilt die Basis in zwei gleich lange Seiten.
- Die Höhe steht rechtwinklig auf der Basis.



Das Dreieck wird durch die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt. In diesen lässt sich der Satz des Pythagoras anwenden. Nennen wir den Schenkel „s“.

Für die Höhe  $h = 3 \text{ cm}$  und die Basis  $b = 4 \text{ cm}$  gilt:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$s^2 = (3 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2$$

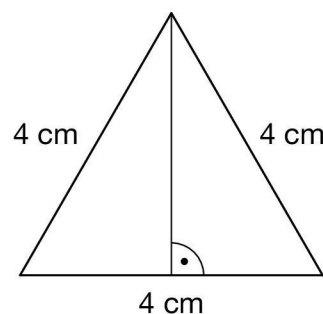
$$s^2 = 9 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2$$

$$s^2 = 13 \text{ cm}^2$$

$$s \approx 3,61 \text{ cm}$$

### Einstiegsaufgabe

Berechne die Höhe  $h$  des abgebildeten gleichseitigen Dreiecks.

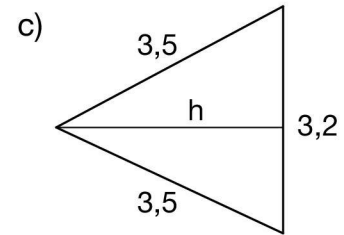
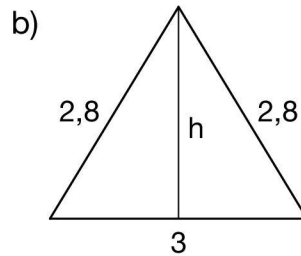
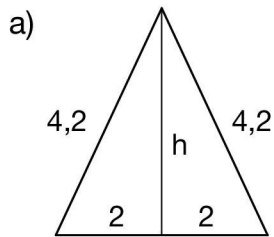


## 4.4 Den Satz des Pythagoras bei geometrischen Figuren anwenden

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Berechne die Höhe  $h$  der abgebildeten gleichschenkligen Dreiecke.



2. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ . Berechne die Länge seiner Diagonalen und gib das Ergebnis in cm an.

a)  $a = 8 \text{ cm}$

b)  $a = 55 \text{ mm}$

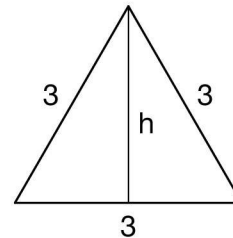
c)  $a = 0,5 \text{ dm}$

d)  $a = 11 \text{ mm}$

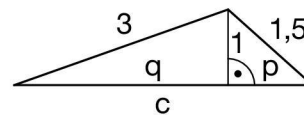
### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



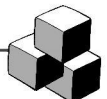
3. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Seitenlängen  $a = 3 \text{ cm}$ . Berechne die Länge der Höhe  $h$ .



4. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit  $a = 3 \text{ cm}$  und  $b = 15 \text{ mm}$  sowie der Höhe  $h_c = 0,1 \text{ dm}$ . Berechne die Länge der Seite  $c$ .



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



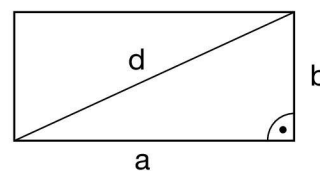
5. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Höhe  $h = 5 \text{ cm}$ . Berechne den Umfang des Dreiecks.
6. Berechne die Länge der Diagonale  $d$  eines Rechtecks mit den angegebenen Seitenlängen.

a)  $a = 3 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$

b)  $a = 12 \text{ dm}$ ;  $b = 6 \text{ dm}$

c)  $a = 25 \text{ mm}$ ;  $b = 7,5 \text{ cm}$

d)  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $b = 80 \text{ mm}$





## 4.5 Den Satz des Pythagoras bei Körpern anwenden

Video:



### Einführung

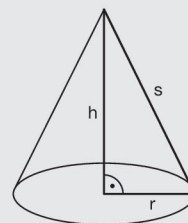
Wenn bei Körpern Seitenlängen gesucht sind, kann man diese häufig mit dem **Satz des Pythagoras** berechnen. Dazu ist es zunächst nötig, ein rechtwinkliges Dreieck in dem Körper zu suchen, welches diese Seite enthält und in dem die anderen beiden Seitenlängen bekannt sind. Anschließend wendet man in diesem Dreieck den Satz des Pythagoras an.

### Beispiele:

**Gegeben:** Kegel mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$ .

**Gesucht:** Länge der Seitenkante  $s$ .

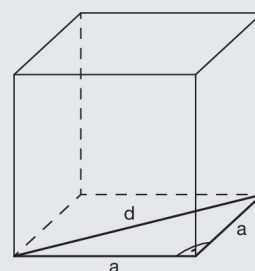
$$h^2 + r^2 = s^2$$



**Gegeben:** Würfel mit Kantenlänge  $a$ .

**Gesucht:** Länge der Diagonale einer Seitenfläche.

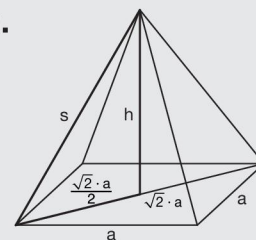
$$a^2 + a^2 = d^2$$



**Gegeben:** Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge  $a$  und Seitenkante  $s$ . Die Länge der Diagonale der Grundfläche ist  $\sqrt{2} \cdot a$ .

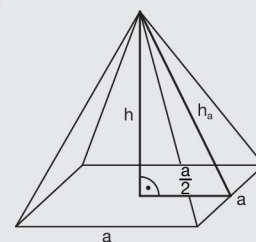
**Gesucht:** Höhe  $h$ .

$$\left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}\right)^2 + h^2 = s^2$$



**Gegeben:** Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge  $a$  und Höhe  $h$ . **Gesucht:** Höhe  $h_a$  einer Seitenfläche.

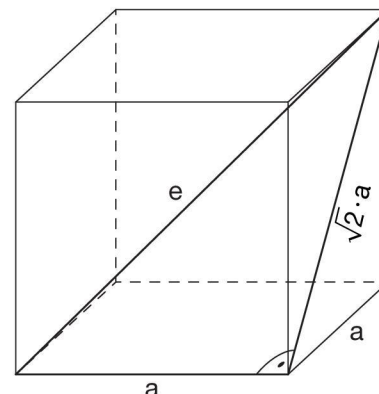
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_a^2$$



### Einstiegsaufgabe

Male in dem gegebenen Würfel das Dreieck aus, das die Diagonale des Würfels enthält. Wende den Satz des Pythagoras auf dieses Dreieck an.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

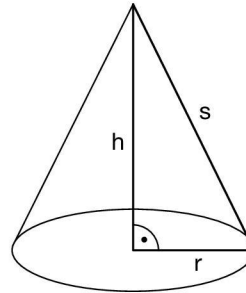


## 4.5 Den Satz des Pythagoras bei Körpern anwenden

### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1

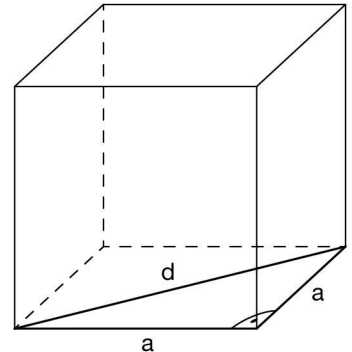
1. Gegeben ist ein Kegel mit der Höhe  $h = 27$  cm und dem Radius  $r = 5$  cm.

Berechne die Seitenkante  $s$ .



2. Gegeben ist ein Würfel mit der Seitenlänge 6 cm.

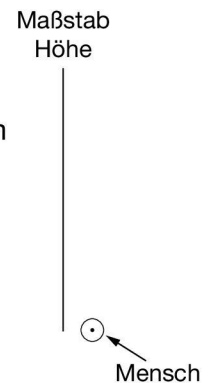
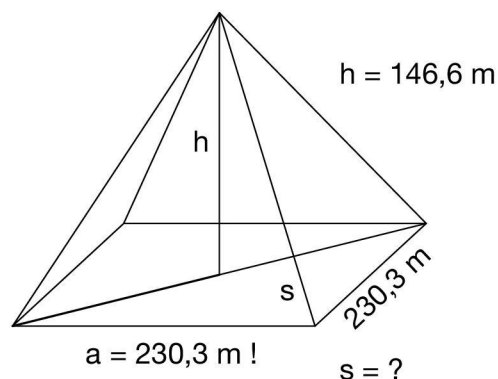
Berechne die Länge der Diagonale  $d$  einer Seitenfläche in cm.



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2

3. Baran ist mit seinen Eltern im Urlaub in Ägypten. Er möchte unbedingt die Cheops-Pyramide besichtigen und fragt sich, wie lange eine Seitenkante der Pyramide ist.

Da er sich sehr mit dem Thema beschäftigt hat, fertigte er zu Hause bereits eine Skizze der Pyramide mit quadratischer Grundfläche an. Hilf ihm bei der Berechnung.



### Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3

4. Berechne die Höhe einer quadratischen Pyramide, die eine Kantenlänge von 4 Metern besitzt und deren Mantel, also die vier Seitenflächen der Pyramide, zusammen einen Inhalt von  $80 \text{ m}^2$  hat.
5. Ina hat ein Glas mit Zitronenlimonade, das 20 cm hoch ist und einen Radius von 3,5 cm hat. Darin steckt diagonal ein Strohhalm, der 8 cm aus dem Glas herausragt. Berechne die Gesamtlänge des Strohhalmes.
6. Berechne die Länge der Raumdiagonale eines Quaders mit den Seitenlängen  $a = 2$  cm,  $b = 3,5$  cm und  $c = 5,8$  cm.



## Bildquellenverzeichnis

---

- S. 8: Schüler grübelt © Patrick Daxenbichler/Fotolia.com
- S. 25: Basketballkorb © Volker Schlichting/stock.adobe.com
- S. 37: Pythagoras von Samos © Galilea/wikipedia
- S. 47: Alte Synagoge Chemnitz © Levy: Synagogen. Leipzig 1904. [Public domain]
- S. 47: Dom zu Speyer © Roman Eisele  
[CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)]
- S. 47: Frankfurter Messeturm © Norbert Nagel  
[CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)]
- S. 47: Sultan-Ahmed-Moschee Istanbul © Dersaadet  
[CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)]
- S. 52: Cheops-Pyramide © Nina at the Norwegian bokmål language Wikipedia  
[CC BY-SA 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)]